Но так как из „Начал" мы знаем, что средняя геометрическая двух величин меньше их средней арифметической, или что

$$x'x < \left(\frac{x+x'}{2}\right)^2,$$

то

$$\frac{y^2}{x} > \frac{y'^2}{x'}.$$

Убедившись, таким образом, в прочности основ, заложенных Аполлонием в первой книге, мы тем лучше можем понять, как он сумел подняться на такую высоту в других книгах, особенно в третьей и, отчасти, в пятой.

Мы должны ограничиться здесь лишь кратким обзором содержания этих книг.

Во *второй* книге выясняются основные свойства асимптот и сопряженных диаметров. В ней рассматриваются, кроме обеих ветвей какой-нибудь гиперболы, еще и *сопряженные гиперболы*, расположенные в различных углах, образуемых асимптотами, и имеющие диаметры одинаковой длины. Дело в том, что даже диаметрам, не пересекающим кривых, приписываются определенные длины, совпадающие фактически с теми, какими мы пользуемся в настоящее время. В этой книге решаются еще различные задачи о диаметрах и асимптотах, в частности, построение центров и осей данного конического сечения, построение касательной, образующей данный угол с диаметром, проходящим через точку касания, и т. д.

В *третьей* книге рассматриваются, прежде всего, свойства точек кривых, независимые от диаметров и осей. Аполлоний выводит их без труда из названной уже нами *теоремы площадей*, сводящейся фактически к отнесению кривой к двум несопряженным диаметрам. Легко понять, что это является также отличным исходным пунктом для доказательства известной уже Архимеду теоремы о *степени*, — теоремы, относящейся к хордам, имеющим данное, но произвольно выбранное направление. В этой книге встречаются также главные теоремы о полюсах и полярах и, наконец, — получение конического сечения с помощью двух *пучков прямых*, называемых в настоящее время *проективными* или *гомографическими*: вершинами этих пучков являются любые точки A и C кривой, а соответствующие прямые AM и CM характеризуются тем, что они отсекают на прямых, проведенных через C и A параллельно касательным в A и C, такие *отрезки* CP и AQ, что построенный на них прямоугольник обладает постоянной площадью.

Легко заметить, что все эти предложения неполны и даже мало понятны, если рассматривать только одну ветвь гиперболы. Поэтому ясно, какие выгоды представляет рассмотрение обеих ветвей гиперболы, как это начал делать — особенно в третьей книге своего труда,— Аполлоний, который благодаря этому возвышается над всеми прежними исследователями этого вопроса, хотя